Adı Soyadı :
Numarası :
İmza :

1	2	3	4	5	6	7	8	Toplam

18.04.2022

2021-2022 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT314 KOMP. FONK. TEO. GİRİŞ ARASINAV SORULARI

1) Aşağıdaki ifadelerin bir reel sayı olduğunu gösteriniz.

a) $\dfrac{1+2i}{3-4i}+\dfrac{2-i}{5i}$ b) $\dfrac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$

2) $|z|\leq 1$ ise $|Re(2+\bar{z}+z^3)|\leq 4$ olduğunu gösteriniz.

3) z_0 merkezli r yarıçaplı $|z-z_0|=r$ çember denkleminin

$$|z|^2-2Re(z\bar{z}_0)+|z_0|^2=r^2$$

şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

4) $z_1=\dfrac{i}{-2-2i}$, $z_2=(\sqrt{3}-i)^6$ sayılarının esas argümanlarını bulunuz.

5) $(-8-8\sqrt{3}i)^{1/4}$ sayısının tüm farklı değerlerini $a+ib$ şeklinde yazınız.

6) $w=(1+i)^{1+i}$ değerlerini bulunuz. $Re\,w$, $Im\,w$ yi bulunuz.

7) $(ie^{\pi})^{i}$ ifadesinin bütün değerlerini, modülünü ve argümanını bulunuz.

8) $A=\{z\in\mathbb{C}:\ 1<|z+1|<2\}$ kümesini kompleks düzlemde gösteriniz, A', A^{o}, ∂A kümelerini bulunuz.

Not: 1., 2., 3., 4. sorular 10 ar puan,
5., 6., 7., 8. sorular 15 er puandır.
Süre 110 dakikadır.
Başarılar...

Prof. Dr.
Birsen SAĞIR DUYAR

ARASINAV ÇÖZÜMLERİ

① a) $\dfrac{1+2i}{3-4i}+\dfrac{2-i}{5i}=\dfrac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}+\dfrac{(2-i)(-5i)}{(5i)(-5i)}$

$$=\frac{-5+10i}{25}+\frac{-5-10i}{25}=-\frac{2}{5}$$

b) $\dfrac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}=\dfrac{5i}{(1-3i)(3-i)}=\dfrac{5i}{-10i}=-\dfrac{1}{2}$

② $|\operatorname{Re} z|\leq|z|$, $|z_1+z_2+z_3|\leq|z_1|+|z_2|+|z_3|$ olduğu kullanılırsa

$$|\operatorname{Re}(2+\bar z+z^3)|\leq|2+\bar z+z^3|\leq 2+|\bar z|+|z^3|$$
$$\leq 2+|z|+|z|^3\leq 2+1+1=4$$

③ $z\bar z=|z|^2$ ve $\operatorname{Re} z=\dfrac{z+\bar z}{2}$ olduğu kullanılırsa

$(z-z_0)(\bar z-\bar z_0)=r^2$, $z\bar z-(z\bar z_0+\bar z z_0)+z_0\bar z_0=r^2$

$|z|^2-2\operatorname{Re}(z\bar z_0)+|z_0|^2=r^2$ olur.

④. $\arg\left(\dfrac{i}{-2-2i}\right)=\arg i-\arg(-2-2i)=\dfrac{\pi}{2}-\left(+\dfrac{5\pi}{4}\right)=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$

~~esas argüman~~ $\cancel{\dfrac{5\pi}{4}-2\pi=-\dfrac{3\pi}{4}}$

. $\arg(\sqrt3-i)^6=6\arg(\sqrt3-i)=6\cdot\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\pi$, esas argüman $-\pi+2\pi=\pi$

⑤ $(-8-8\sqrt3 i)^{1/4}=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\right)}$

$-8-8\sqrt3 i=16e^{i\left[-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right]}$, $k=0,\mp1,\mp2,\dots$

$z_0=2e^{-i\pi/6}=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\frac{\sqrt3}{2}-\frac{i}{2}\right)=\sqrt3-i$

$z_1=\left(2e^{-i\pi/6}\right)e^{i\pi/2}=z_0 i=1+\sqrt3 i$

$z_2=\left(2e^{-i\pi/6}\right)e^{i\pi}=-z_0=-(\sqrt3-i)=-\sqrt3+i$

$z_3=\left(2e^{-i\pi/6}\right)e^{-i3\pi/2}=z_0(-i)=-(1+\sqrt3 i)=-1-\sqrt3 i$

⑥ $(1+i)^{1+i} = e^{(1+i)\log(1+i)} = e^{(1+i)[\ln|1+i| + i\arg(1+i) + 2k\pi i]}$

$= e^{(1+i)[\ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)]}$

$= e^{\frac{1}{2}\ln 2 + i(\frac{\pi}{4}+2k\pi) + i\frac{\ln 2}{2} - (\frac{\pi}{4}+2k\pi)}$

$= e^{\frac{1}{2}\ln 2 - (\frac{\pi}{4}+2k\pi)} \cdot e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}+2k\pi)}$

$= e^{\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4} - 2k\pi} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}+2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}+2k\pi\right)\right],$ $k\in\mathbb{Z}$

⑦ $(ie^{\pi})^{i} = i^{i}\cdot e^{\pi i}$

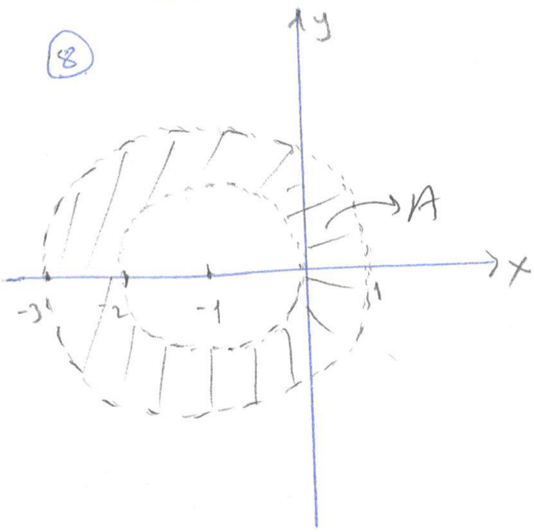
$i^{i} = e^{i\log i} = e^{i(\ln|i| + i\arg i)} = e^{i[\ln 1 + i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)]} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$

$(ie^{\pi})^{i} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}\cdot e^{\pi i} = e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi+\pi i}$

$|(ie^{\pi})^{i}| = e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}$, $|e^{z}| = e^{\operatorname{Re} z}$, $\arg e^{z} = \operatorname{Im} z$

$\arg(ie^{\pi})^{i} = \pi + 2k\pi$

⑧



$A^{\circ} = \{z \mid 1 < |z+1| < 2\} = A \Rightarrow A$ açık

$A' = \{z \mid 1 \le |z+1| \le 2\}$

$\partial A = \{z \mid |z+1| = 1\} \cup \{z \mid |z+1| = 2\}$